



应用随机过程

张波 商豪 邓军

中国人民大学 统计学院

1/47



GoBack

FullScreen

Close

Quit



第3章 Poisson过程

- 3.1 Poisson过程
- 3.2 与Poisson过程相联系的若干分布
- 3.3 Poisson过程的推广

2/47



GoBack

FullScreen

Close

Quit



§3.1 Poisson过程的定义

定义 3.1.1 随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为计数过程, 如果 $N(t)$ 表示从时刻0到 t 某一特定事件 A 发生的次数, 它具备以下两个特点:

- (1) $N(t) \geq 0$ 且取值为整数;
- (2) $s < t$ 时, $N(s) \leq N(t)$ 且 $N(t) - N(s)$ 表示 $(s, t]$ 时间内事件 A 发生的次数。

定义 3.1.2 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的Poisson过程, 如果

- (1) $N(0) = 0$;
- (2) 过程有独立增量;



(3) 对任意的 $s, t \geq 0$,

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

注: (1) Poisson过程是独立平稳增量的计数过程;

(2) 由于 $E[N(t)] = \lambda t$, 于是可认为 λ 是单位时间内发生的事件的平均次数, 故一般称 λ 是Poisson过程的强度或速率.

例 3.1.1 (Poisson过程在排队论中的应用) 在随机服务系统中排队现象的研究中, 经常用到Poisson 过程模型, 例如, 到达电话总机的呼叫数目, 到达某服务设施的顾客数, 都可以用Poisson过程来描述, 以某火车站售票处为例, 设从早上8:00开始, 此售票处连续售票, 乘客依10人/小时的平均速率到达, 则从9:00到10:00这1小时内最多有5名乘客来此购票的概率是多少? 从10:00-11:00没有人来买票的

4/47



GoBack

FullScreen

Close

Quit



概率是多少?

我们用一个Poisson过程来描述. 设8:00为0时刻, 则9:00为1时刻, 参数 $\lambda = 10$. 由Poisson过程的平稳性知

$$P(N(2) - N(1) \leq 5) = \sum_{n=0}^5 e^{-10 \cdot 1} \frac{(10 \cdot 1)^n}{n!},$$

$$P(N(3) - N(2) = 0) = e^{-10} \cdot \frac{(10)^0}{0!} = e^{-10}.$$

例 3.1.2 (事故发生次数与保险公司接到的索赔数)

若以 $N(t)$ 表示某场所在 $(0, t]$ 时间内发生不幸事故的数目, 则 Poisson过程就是 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的一种很好近似. 例如, 保险公司接到赔偿请求的次数 (设一次事故就导致一次索赔) 都是可以应用Poisson过程的模型. 我们考虑一种最简单情况, 设保险公司每次的赔付都是1, 每月平均接到索赔要求4次, 则一年中它要付出的金额平均为多少?

5/47



GoBack

FullScreen

Close

Quit



设一年开始为0时刻, 1月末为时刻1, 2月末为时刻2, ..., 则年末为时刻12

$$P(N(12) - N(0) = n) = \frac{(4 \times 12)^n}{n!} e^{-4 \times 12}.$$

均值

$$E[N(12) - N(0)] = 4 \times 12 = 48.$$

为什么实际中有这么多的现象可以用Poisson过程来反映呢? 其根据是小概率事件原理. 我们在概率论的学习中已经知道, Bernoulli试验中, 每次试验成功的概率很小而试验的次数很多时, 二项分布会逼近Poisson分布. 这一想法很自然地推广到随机过程情况. 比如上面提到的事故发生的例子, 在很短的时间内发生事故的概率是很小的, 但假如考虑很多个这样很短的时间的连接, 事故的发生将会有有一个大致稳定的速率, 这很类似于Bernoulli试验以及二项分布逼



近Poisson分布时的假定.

Poisson过程的另一等价定义:

定义 3.1.3 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个计数过程, 若满足

(1)' $N(0) = 0$;

(2)' 过程有平稳独立增量;

(3)' 存在 $\lambda > 0$, 当 $h \downarrow 0$ 时

$$P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h);$$

(4)' 当 $h \downarrow 0$ 时,

$$P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h).$$

则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为Poisson过程.

事实上, 把 $[0, t]$ 划分为 n 个相等的时间区间, 则由条件(4)'可知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在每个小区间内事件发生两



次或两次以上的概率趋于0，因此，事件发生一次的概率 $p \approx \lambda \frac{t}{n}$ (显然 p 会很小)，事件不发生的概率为 $1-p \approx 1-\lambda \frac{t}{n}$ ，这恰好是一次Bernoulli 试验.其中事件发生一次即为试验成功，不发生即为失败，再由条件(2)'给出的平稳独立增量性， $N(t)$ 就相当于 n 次独立Bernoulli 试验中试验成功的总次数，由Poisson 分布的二项分布逼近可知 $N(t)$ 将服从参数为 λt 的Poisson分布.

Poisson过程两定义等价的严格的数学证明:

定理 3.1.1 满足上述条件(1)'-(4)'的计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是Poisson过程，反过来Poisson 过程一定满足这4个条件.

证明：设计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足条件(1)' ~ (4)', 现证明它是Poisson过程. 可以看到,其实只需验证 $N(t)$ 服从



参数为 λt 的Poisson分布即可. 记

$$P_n(t) = P(N(t) = n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} P(h) &= P(N(h) \geq 1) \\ &= P_1(h) + P_2(h) + \dots \\ &= 1 - P_0(h) \end{aligned}$$

9/47

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P(N(t+h) = 0) \\ &= P(N(t+h) - N(t) = 0, N(t) = 0) \\ &= P(N(t) = 0)P(N(t+h) - N(t) = 0) \\ &= P_0(t)P_0(h) \\ &= P_0(t)(1 - \lambda h + o(h)) \quad (\text{条件}(3)', (4)') . \end{aligned}$$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



因此

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h},$$

令 $h \rightarrow 0$, 得

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t).$$

解此微分方程, 得

$$P_0(t) = K e^{-\lambda t},$$

其中 K 为常数. 由 $P_0(0) = P(N(0) = 0) = 1$ 得 $K = 1$, 故

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$



同理，当 $n \geq 1$ 时，有

$$\begin{aligned} P_n(t+h) &= P(N(t+h) = n) \\ &= P(N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 0) \\ &\quad + P(N(t) = n-1, N(t+h) - N(t) = 1) \\ &\quad + P(N(t+h) = n, N(t+h) - N(t) \geq 2) \\ &= P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t) \cdot P_1(h) + o(h) \\ &= (1 - \lambda h)P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h). \end{aligned}$$

于是

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + o(h),$$

令 $h \rightarrow 0$ 得

$$P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



利用归纳法解得

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = P(N(t) = n).$$

反过来, 证明Poisson过程满足条件(1)' ~ (4)', 只需验证条件(3)', (4)'成立.

12/47



GoBack

FullScreen

Close

Quit



由定义中第三个条件可得

$$\begin{aligned} P(N(t+h) - N(t) = 1) &= P(N(h) - N(0) = 1) \\ &= e^{-\lambda h} \frac{\lambda h}{1!} = \lambda h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda h)^n}{n!} \\ &= \lambda h [1 - \lambda h + o(h)] \\ &= \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(N(t+h) - N(t) \geq 2) &= P(N(h) - N(0) \geq 2) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\lambda h} \frac{(-\lambda h)^n}{n!} \\ &= o(h). \end{aligned}$$

例 3.1.3 事件 A 的发生形成强度为 λ 的Poisson过程 $\{N(t), t \geq 0\}$. 如果每次事件发生时以概率 p 能够被记录下来, 并以 $M(t)$ 表示到 t 时刻被记录下来的事件总数, 则



$\{M(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 λp 的 Poisson 过程.

事实上, 由于每次事件发生时, 对它的记录和不记录都与其他的事件能否被记录独立, 而且事件发生服从 Poisson 分布. 所以 $M(t)$ 也是具有平稳独立增量的, 故只需验证 $M(t)$ 服从均值为 $\lambda p t$ 的 Poisson 分布. 即对 $t > 0$, 有

$$P(M(t) = m) = \frac{(\lambda p t)^m}{m!} e^{-\lambda p t}.$$

由于

$$\begin{aligned} & P(M(t) = m) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(M(t) = m | N(t) = m + n) \cdot P(N(t) = m + n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{m+n}^m p^m (1-p)^n \cdot \frac{(\lambda t)^{m+n}}{(m+n)!} e^{-\lambda t} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda p t)^m (\lambda(1-p)t)^n}{m! n!} \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda p t)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p)t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda p t)^m}{m!} e^{\lambda(1-p)t} = e^{-\lambda p t} \frac{(\lambda p t)^m}{m!}. \end{aligned}$$

例 3.1.4 若每条蚕的产卵数服从Poisson分布，强度





为 λ ，而每个卵变为成虫的概率为 p ，且个卵是否变为成虫彼此间没有关系，求每条蚕养活 k 只小蚕的概率。

解 由上例我们立即知道小蚕数服从强度为 λp 的Poisson分布，故所求概率为

$$\frac{(\lambda p t)^k}{k!} e^{-\lambda p t}$$

例 3.1.5 观察资料表明，天空中星体数服从Poisson分布，其参数为 λV ，这里 V 是被观察区域的体积.若每个星球上有生命存在的概率为 p ，则在体积为 V 的宇宙空间中有生命存在的星球数服从参数为 $\lambda p V$ 的Poisson分布.



§3.2 与Poisson过程相联系的若干分布

首先给出Poisson过程的有关记号, 如图3-1所示, Poisson过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的一条样本路径一般是跳跃度为1的阶梯函数.

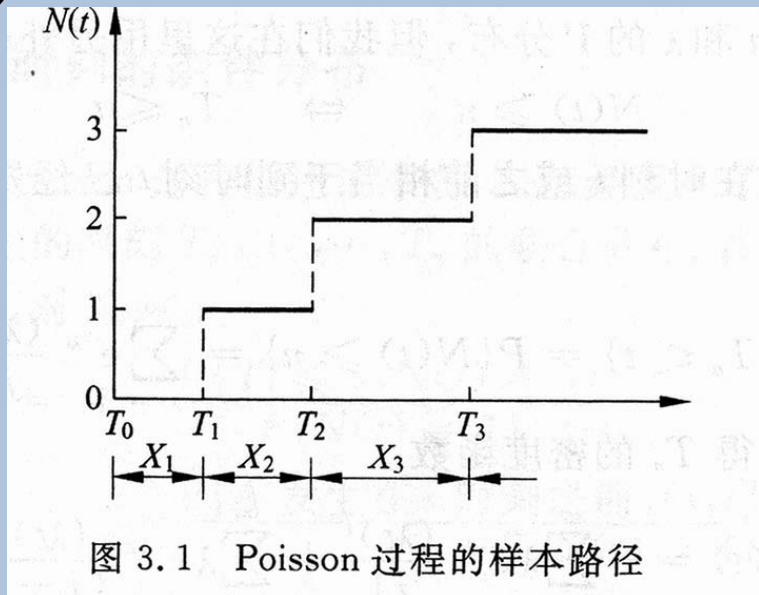


图 3.1 Poisson 过程的样本路径

$T_n, n = 1, 2, 3 \dots$, 表示第 n 次事件发生的时刻, 规定 $T_0 =$



0. $X_n, n = 1, 2, \dots$, 表示第 n 次与第 $n - 1$ 次事件发生的时间间隔.

§3.2.1 X_n 和 T_n 的分布

定理 3.2.1 $X_n, n = 1, 2, \dots$ 服从参数为 λ 的指数分布, 且相互独立.

证明: 首先考虑 X_1 的分布, 注意到事件 $\{X_1 > t\}$ 等价于事件 $\{N(t) = 0\}$, 即 $(0, t]$ 内没有事件发生. 因此

$$P(X_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t},$$

从而

$$P(X_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$



再来看 X_2

$$\begin{aligned} P(X_2 > t | X_1 = s) &= P(N(s+t) - N(s) = 0 | X_1 = s) \\ &= P(N(s+t) - N(s) = 0) (\text{独立增量性}) \\ &= e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

所以 X_2 与 X_1 独立, 且都服从参数为 λ 的指数分布. 重复同样的推导, 可得定理结论.

注 3.2.1 定理3.2.1的结果应该是预料之中的, 由于Poisson过程有平稳独立增量, 过程在任何时刻都“重新开始”换言之这恰好就是“无记忆”的体现, 与指数分布的“无记忆性”是对应的.

定理 3.2.2 $T_n, n = 1, 2, 3 \dots$ 服从参数为 n 和 λ 的 Γ 分布.



证明：由于 $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ，而由上述定理知道， X_i 是相互独立的且有同指数分布，同时指数分布是 Γ 分布的一种特殊情形（ $n = 1$ ）由 Γ 分布可加性，易得 T_n 服从参数为 n 和 λ 的 Γ 分布，但我们在这里用另外的方法导出。注意到

$$N(t) \geq n \iff T_n \leq t$$

即第 n 次事件发生在时刻 t 或之前相当于到时刻 t 已经发生的事件数目至少是 n 。因此

$$P(T_n \leq t) = P(N(t) \geq n) = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}.$$



对第上式两端求导可得 T_n 的密度函数

$$\begin{aligned} f(t) &= - \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

■

Poisson过程又一定义方法:

定义 3.2.1 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的Poisson过程, 如果每次事件发生的时间间隔 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, 且服从同一参数为 λ 的指数分布.

定义3.2.1提供了对Poisson过程进行计算机模拟的

21/47

||◀ ▶||

◀ ▶

GoBack

FullScreen

Close

Quit



方便途径：只需产生 n 个同指数分布的随机数，将其作为 $X_i, i = 1, 2, \dots$ ，即可得到Poisson过程的一条样本路径.

例 3.2.1 设从早上8:00开始有无穷多的人排队等候服务，只有一名服务员，且每个人接受服务的时间是独立的并服从均值为20分钟的指数分布，则到中午12:00为止平均有多少人已经离去，已有9个人接受服务的概率是多少？

解：由所设条件可知，离去的人数 $\{N(t)\}$ 是强度为3的Poisson过程（这里以小时为单位）. 设8:00为零时刻，则

$$P(N(4) - N(0) = n) = e^{-12} \frac{(12)^n}{n!}$$

其均值为12，即到12:00为止，离去的人平均是12名. 而有9个人接受过服务的概率是

$$P(N(4) = 9) = e^{-12} \frac{(12)^9}{9!}.$$



例 3.2.2 假定某天文台观测到的流星流是一个Poisson过程，根据以往资料统计为每小时平均观察到3颗流星.试求：在上午8点到12点期间，该天文台没有观察到流星的概率.

解 设早晨8时为0时刻，以 $N(t)$ 表示0时到 t 时观测到的流星数，则 $\{N(t)\}$ 是强度为3的Poisson过程，则有

$$N(4) - N(0) \sim P(3 \times 4)$$

故在上午8点到12点期间，该天文台没有观察到流星的概率为

$$P\{N(4) - N(0) = 0\} = e^{-12}$$

§3.2.2 事件发生时刻的条件分布

定理 3.2.3 在已知 $[0, t]$ 内A只发生一次的前提下，A发生的时刻在 $[0, t]$ 上是均匀分布.



GoBack

FullScreen

Close

Quit



事实上, 对于 $n = 1$ 时的情形, 对于 $s \leq t$

$$\begin{aligned} P(T_1 \leq s | N(t) = 1) &= \frac{P(T_1 \leq s, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} \\ &= \frac{P(\text{A发生在}s\text{时刻之前, } (s, t]\text{内A没有发生})}{P(N(t) = 1)} \\ &= \frac{P(N(s) = 1) \cdot P(N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{s}{t} \end{aligned}$$

定理 3.2.4 在已知 $N(t) = n$ 的条件下, 事件发生的 n 个时刻 $T_1, T_2, \dots, T_n$ 的联合分布密度是

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n.$$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



证明: 设 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} = t$. 取 h_i 充分小使得 $t_i + h_i < t_{i+1}$, $i = 1, 2, \cdots, n$,

$$\begin{aligned} & P(t_i < T_i \leq t_i + h_i, i = 1, 2, \cdots, n | N(t) = n) \\ &= \frac{P(N(t_i + h_i) - N(t_i) = 1, N(t_{i+1}) - N(t_i + h_i) = 0, 1 \leq i \leq n, N(t_1) = 0)}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} \cdots \lambda h_n e^{-\lambda h_n} e^{-\lambda(t - h_1 - h_2 - \cdots - h_n)}}{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!} \\ &= \frac{n!}{t^n} h_1 \cdots h_n. \end{aligned}$$

故按定义, 给定 $N(t) = n$ 时, $(T_1, \cdots, T_n)$ 的 n 维条件分布密度函数

$$\begin{aligned} f(t_1, \cdots, t_n) &= \lim_{\substack{h_i \rightarrow 0 \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{P(t_i < T_i \leq t_i + h_i, 1 \leq i \leq n | N(t) = n)}{h_1 h_2 \cdots h_n} \\ &= \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n. \end{aligned}$$



注： 在已知 $[0, t]$ 内发生了 n 次事件的前提下，各次事件发生的时刻 $T_1, T_2, \dots, T_n$ （不排序）可看做相互独立的随机变量，且都服从 $[0, t]$ 上的均匀分布.

例 3.2.3 乘客按照强度为 λ 的Poisson过程来到某火车站，火车在时刻 t 启程，计算在 $(0, t]$ 内到达的乘客等待时间的总和的期望值，即求 $E \left(\sum_{i=1}^{N(t)} (t - T_i) \right)$ ，其中 T_i 是第 i 个乘客来到的时刻.



解： 在 $N(t)$ 给定条件下，取条件期望

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - T_i) | N(t) = n \right] &= E \left[\sum_{i=1}^n (t - T_i) | N(t) = n \right] \\ &= nt - E \left[\sum_{i=1}^n T_i | N(t) = n \right] \end{aligned}$$

例 3.2.4 记 $U_1, U_2, \dots, U_n$ 为 n 个独立的服从 $(0, t]$ 上的均匀分布的随机变量，由定理知

$$E \left[\sum_{i=1}^n T_i | N(t) = n \right] = E \left[\sum_{i=1}^n U_i \right] = \frac{nt}{2}$$

从而

$$E \left[\sum_{i=1}^n (t - T_i) | N(t) = n \right] = nt - \frac{nt}{2} = \frac{nt}{2}.$$

所以

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - T_i) \right] &= E \left[E \left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - T_i) \mid N(t) = n \right] \right] \\ &= \frac{t}{2} E[N(t)] = \frac{\lambda t^2}{2}. \end{aligned}$$

例 3.2.5 考虑例3.2.3中每次事件发生时被记录到的概率随时间发生变化时的情况，设事件A在 s 时刻发生被记录到的概率是 $P(s)$ ，若以 $M(t)$ 表示到 t 时刻被记录的事件数，那么它还是Poisson过程吗？试给出 $M(t)$ 的分布。

解：易看出 $M(t)$ 已不能形成一个Poisson过程，因为虽然它仍然具有独立增量性，但由于 $P(s)$ 的影响，它已不再有平稳增量性。但可以证明，对 $\forall t$ ， $M(t)$ 依然是 Poisson分布，





参数与 t 和 $P(s)$ 有关. 实际上, $M(t)$ 的均值为 λtp , 其中

$$p = \frac{1}{t} \int_0^t P(s) ds.$$

事实上, 若对 $N(t)$ 给定的条件下, 取条件期望, 则有

$$\begin{aligned} & P(M(t) = m) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(M(t) = m | N(t) = m + k) P(N(t) = m + k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\text{已知}[0, t] \text{中发生了 } m + k \text{ 次事件, 只有 } m \text{ 件被记录}) \\ & \quad \times P(N(t) = m + k) \end{aligned}$$

由于每次事件是否被记录是独立的, 所以上式中 $P(M(t) = m | N(t) = m + k)$ 可以看做在 $m + k$ 次独立试验中有 m 次成功 (被记录) 和 k 次失败 (不被记录) 的概率.



故

$$P(M(t) = m | N(t) = m + k) = \binom{m+k}{m} p^m (1-p)^k$$

其中 p 是每次试验成功的概率，由定理3.2.3，并且已知道事件的发生和被记录是独立的，所以

$$\begin{aligned} p &= P(\text{事件在}[0, t]\text{内发生且被记录} | N(t) = m + k) \\ &= \int_0^t P(\text{事件在}s\text{时刻发生且被记录} | N(t) = m + k) ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{t} P(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t P(s) ds \end{aligned}$$

30/47



GoBack

FullScreen

Close

Quit



$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} P(M(t) = m | N(t) = m + k) \times P(N(t) = m + k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{m} p^m (1-p)^k \frac{(\lambda t)^{m+k}}{(m+k)!} e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+k)!}{m!k!} p^m (1-p)^k \frac{(\lambda t)^{m+k}}{(m+k)!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{(\lambda t p)^m}{m!} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-p)^k}{k!} (\lambda t)^k \\ &= \frac{(\lambda t p)^m}{m!} e^{-\lambda p t} \end{aligned}$$

故 $P(M(t) = m) = \frac{(\lambda t p)^m}{m!} e^{-\lambda p t}$, 其中 $p = \frac{1}{t} \int_0^t P(s) ds$.



GoBack

FullScreen

Close

Quit



§3.3 泊松过程的推广

§3.3.1 非齐次Poisson过程

当Poisson过程的强度 λ 不再是常数，而与时间 t 有关时，Poisson过程被推广为非齐次Poisson过程.一般来说,非齐次Poisson过程是不具备平稳增量的(例如例3.2.4). 在实际中，非齐次Poisson过程也是比较常用的.例如在考虑设备的故障率时，由于设备使用年限的变化，出故障的可能性会随之变化；放射性物质的衰变速度，会因各种外部条件的变化而随之不同；昆虫产卵的平均数量随年龄和季节而变化等.在这样的情况下，再用齐次Poisson过程来描述就不合适了，于是改用非齐次的Poisson过程来处理.

32/47



GoBack

FullScreen

Close

Quit



定义 3.3.1 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称做强度函数为 $\lambda(t) > 0 (t \geq 0)$ 的非齐次泊松过程, 如果

- (1) $N(0) = 0$;
- (2) 过程有独立增量;
- (3) $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$;
- (4) $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$.

类似于Poisson过程, 非齐次Poisson过程有如下的等价定义.

定义 3.3.2 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度函数为 $\lambda(t) > 0 (t \geq 0)$ 的非齐次 Poisson过程, 若

- (1) $N(0) = 0$;
- (2) 过程有独立增量;
- (3) 对任意实数 $t \geq 0, s \geq 0, N(t+s) - N(t)$ 是参数为



$m(t+s) - m(t) = \int_t^{t+s} \lambda(u) du$ 的泊松分布.

注: $m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$.

泊松过程与非齐次泊松过程之间转换关系:

定理 3.3.1 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次Poisson过程. 对任意 $t \geq 0$, 令 $N^*(t) = N(m^{-1}(t))$, 则 $\{N^*(t)\}$ 是一个强度为 1 的泊松过程.

证明: 首先由 $\lambda(t) > 0$ 知, $m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds > 0$ 且单调增加, 所以 $m^{-1}(t)$ 存在且单调增加. 因而只需证明 $\{N^*(t), t \geq 0\}$ 满足3.1节中的条件(1) ~ (4), 其中(1),(2)不难由 $N(t)$ 的相应性质继承得到. 下面证明它满足(3),(4). 记 $v(t) = m^{-1}(t)$, 则

$$N^*(t) = N(m^{-1}(t)) = N(v(t)).$$



设 $v = m^{-1}(t)$, $v + h' = m^{-1}(t + h)$, 则由

$$\begin{aligned} h &= m(v + h') - m(v) \\ &= \int_v^{v+h'} \lambda(s) ds \\ &= \lambda(v)h' + o(h') \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(N^*(t + h) - N^*(t) = 1)}{h} \\ &= \lim_{h' \rightarrow 0^+} \frac{P(N(v + h') - N(v) = 1)}{\lambda(v)h' + o(h')} \\ &= \lim_{h' \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(v)h' + o(h')}{\lambda(v)h' + o(h')} = 1 \end{aligned}$$

即

$$P(N^*(t + h) - N^*(t) = 1) = h + o(h).$$

35/47



GoBack

FullScreen

Close

Quit



同理可得

$$P(N^*(t+h) - N^*(t) \geq 2) = o(h).$$

所以 $\{N^*(t), t \geq 0\}$ 是参数为1的Poisson过程.

注：用此定理可以简化非齐次Poisson过程的问题到Poisson过程中进行讨论. 另一方面也可以进行反方向的操作，即从一个参数为 λ 的Poisson过程构造一个强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次Poisson过程.

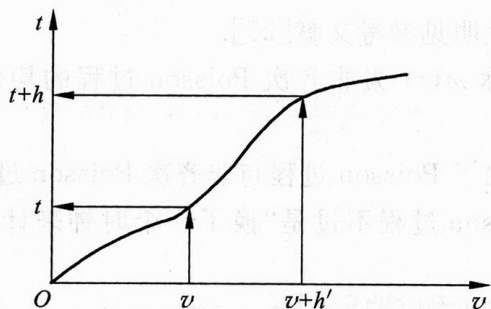


图 3.2 非齐次 Poisson 过程到 Poisson 过程的时间变量的转换

例 3.3.1 设某设备的使用期限为10年，在前5年内它



平均2.5需要维修一次，后5年平均2年需维修一次。试求它在使用期内只维修过一次的概率。

解： 用非齐次Poisson过程考虑，强度函数

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{2.5}, & 0 \leq t \leq 5 \\ \frac{1}{2}, & 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

$$m(10) = \int_0^{10} \lambda(t) dt = \int_0^5 \frac{1}{2.5} dt + \int_5^{10} \frac{1}{2} dt = 4.5$$

因此

$$P(N(10) - N(0) = 1) = e^{-4.5} \frac{(4.5)^1}{1!} = \frac{9}{2} e^{-\frac{9}{2}}.$$

■

§3.3.2 复合Poisson过程

定义 3.3.3 称随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为复合泊松过



GoBack

FullScreen

Close

Quit



程, 如果对于

$t \geq 0$, $X(t)$ 可以表示为

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

其中 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个 Poisson 过程, $Y_i, i = 1, 2, \dots$ 是一族独立同分布的随机变量, 并且与 $\{N(t), t \geq 0\}$ 也是独立的.

注: 复合 Poisson 过程不一定是计数过程, 但是当 $Y_i \equiv c, i = 1, 2, \dots, c$ 为常数时, 可化为泊松过程.

例 3.3.2 保险公司接到的索赔次数服从一个泊松过程 $\{N(t)\}$, 每次要求赔付的金额 Y_i 都相互独立, 且有同分布 F , 每次的索赔数额与它发生的时刻无关, 则 $[0, t]$ 时间区



间内保险公司需要赔付的总金额 $\{X(t)\}$ 就是一个复合泊松过程，其中

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

例 3.3.3 （顾客成批到达的排队系统）设顾客到达某服务系统的时间 $S_1, S_2, \dots$ 形成一强度为 λ 的Poisson过程，在每个时刻 $S_n, n = 1, 2, \dots$ 可以同时有多名顾客到达. Y_n 表示在时刻 S_n 到达的顾客人数，假定 $Y_n, n = 1, 2, \dots$ 相互独立，并且与 $\{S_n\}$ 也独立，则在 $[0, t]$ 时间区间内到达服务系统的顾客总人数也可用一复合Poisson过程来描述.

例 3.3.4 假设顾客按照参数为 λ 的Poisson过程进入一个商店，又假设各顾客所消费的金额形成一族独立同分布的随机变量。以 $X(t)$ 记到时间 t 为止顾客在此商店所花费的



总额, 易知 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个复合Poisson过程。

定理 3.3.2 设 $\{X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, t \geq 0\}$ 是一复合泊松过程, 泊松过程

$\{N(t), t \geq 0\}$ 的强度为 λ , 则

- (1) $X(t)$ 有独立增量;
- (2) 若 $E(Y_i^2) < +\infty$, 则

$$E[X(t)] = \lambda t \cdot EY_1, \quad \text{var}[X(t)] = \lambda t \cdot E(Y_1^2).$$

证明: (1) 令 $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 则

$$X(t_k) - X(t_{k-1}) = \sum_{i=N(t_{k-1})+1}^{N(t_k)} Y_i, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

由过程的独立增量性及各 $Y_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$ 之间的独立性不难得出 $X(t)$ 的独立增量性.



(2) 利用矩母函数方法, 首先有

$$\begin{aligned}\phi_t(u) &= E(e^{uX_t}) \\&= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{uX_t} | N(t)=n] P(N(t)=n) \\&= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{u(Y_1+\dots+Y_n)} | N(t)=n] e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\&= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{u(Y_1+\dots+Y_n)}] e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\&= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{uY_1}) \dots E(e^{uY_n}) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\&= \sum_{n=0}^{\infty} [E(e^{uY_1})]^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\&= e^{\lambda t [E(e^{uY_1}) - 1]}.\end{aligned}$$

对上式求导得

$$E[X(t)] = \lambda t EY_1 \quad \text{及} \quad \text{var}(X(t)) = \lambda t E(Y_1^2).$$

例 3.3.5 在保险中的索赔模型中, 设保险公司接到的索赔要求是强度为每个月两次的泊松过程。每次赔付服从均



值为10000元的正态分布，则一年中保险公司平均的赔付额是多少.

解： 由定理 3.3.2易得

$$E[X(12)] = 2 \times 12 \times 10000 = 240000(\text{元})$$

例 3.3.6 设顾客以每分钟6人的平均速率进入某商场，这一过程可以用Poisson过程来描述.又设进入该商场的每位顾客买东西的概率为0.9，且每位顾客是否买东西互不影响，也与进入该商场的顾客数无关，求一天(12小时)在该商场买东西的顾客数的分布与均值.

解： 以 $N_1(t)$ 表示在时间 $(0, t]$ 内进入该商场的顾客数，则 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 是速率为 $\lambda = 6$ (人/分钟)的Poisson过程.再以 $N_2(t)$ 表示在时间 $(0, t]$ 内在该商场买东西的顾客数，并



设

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{如果第} i \text{位顾客在该商场买东西} \\ 0, & \text{如果第} i \text{位顾客在该商场未买东西} \end{cases}$$

则 Y_i 独立同分布于 $B(1, 0.9)$, 与 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 独立, 且

$$N_2(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i$$

易知

$$N_2(t) \sim P(5.4t)$$

即 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 是速率为 $\lambda = 5.4$ (人/分钟) 的 Poisson 过程, $t = 12$ 小时 = 720 分钟, 则

$$N_2(720) \sim P(3888)$$

即一天(12小时)在该商场买东西的平均顾客数为 $E[N_2(720)] = 3888$ 人.



注：若以 Z_i 表示进入该商场的第 i 位顾客在该商场所花的钱数(单位:元)，且有 $Z_i \sim B(200, 0.5)$ ，则

$$N_3(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} Z_i$$

示在时间 $(0, t]$ 内该商场的营业额，则该商场一天的平均营业额为

$$E[N_3] = E[Z_1]E[N_1] = (200 \times 0.5) \times (6 \times 12 \times 60) = 432000 \text{元}$$

§3.3.3 条件Poisson过程

Poisson过程描述的是一个有着“风险”参数 λ 的个体发生某一事件的频率，如果我们考虑一个总体，其中的个体存在差异，比如发生事故的倾向性因人而异，这时我们可以把概率分布(3.1.2)式解释为给定 λ 时， $N(t)$ 的条件分



布 $P_{k|\lambda}(t)$.

定义 3.3.4 设随机变量 $\Lambda > 0$, 在 $\Lambda = \lambda$ 的条件下, 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程. 则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为条件泊松过程.

注: 设 Λ 的分布是 G , 那么随机选择一个个体在长度为 t 的时间区间内发生 n 次事件的概率为

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(\lambda)$$

这是全概率公式.

定理 3.3.3 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是条件泊松过程, 且 $E(\Lambda^2) < \infty$, 则 (1) $EN(t) = tE\Lambda$;
(2) $\text{var}[N(t)] = t^2\text{var}(\Lambda) + tE\Lambda$.



证明: (1) $EN(t) = E[E(N(t)|\Lambda)] = E(t\Lambda) = tE\Lambda;$
(2) $var(N(t)) = E[N^2(t)] - [EN(t)]^2$
 $= E[E(N^2(t)|\Lambda)] - (tE\Lambda)^2$
 $= E[(\Lambda t)^2 + \Lambda t] - t^2(E\Lambda)^2$
 $= t^2var(\Lambda) + tE\Lambda.$

例 3.3.7 设意外事故的发生频率受某种未知因素影响有两种可能 λ_1, λ_2 , 且 $P(\Lambda = \lambda_1) = p$, $P(\Lambda = \lambda_2) = 1 - p = q$, $0 < p < 1$ 为已知. 已知到时刻 t 已发生了 n 次事故. 求下一次事故在 $t + s$ 之前不会到来的概率. 另外, 这个发生频率为 λ_1 的概率是多少?



GoBack

FullScreen

Close

Quit



解：事实上，我们不难算出

$$\begin{aligned} & P((t, t+s) \text{内无事故} | N(t) = n) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^2 P(\Lambda = \lambda_i) P(N(t) = n, N(t+s) - N(t) = 0 | \Lambda = \lambda_i)}{\sum_{i=1}^2 P(\Lambda = \lambda_i) P(N(t) = n | \Lambda = \lambda_i)} \\ &= \frac{p(\lambda_1 t)^n e^{-\lambda_1(s+t)} + (1-p)(\lambda_2 t)^n e^{-\lambda_2(s+t)}}{p(\lambda_1 t)^n e^{-\lambda_1 t} + (1-p)(\lambda_2 t)^n e^{-\lambda_2 t}} \\ &= \frac{p\lambda_1^n e^{-\lambda_1(s+t)} + q\lambda_2^n e^{-\lambda_2(s+t)}}{p\lambda_1^n e^{-\lambda_1 t} + q\lambda_2^n e^{-\lambda_2 t}} \end{aligned}$$

以及

$$P(\Lambda = \lambda_1 | N(t) = n) = \frac{pe^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^n}{pe^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^n + (1-p)e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^n}.$$